3 1761 07548284 4

QA
218
D47

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n \ (*) :$$

PAR M. DESBOVES.

I. — *Objet du Mémoire.*

1. Les géomètres, qui jusqu'ici se sont occupés de la résolution en nombres entiers des équations à plusieurs inconnues, ont surtout cherché les cas où les équations étaient impossibles; ce sont, au contraire, les cas de possibilité qui doivent être traités ici. Laissant de côté le cas où m est égal à 2, quel que soit n, je me propose de trouver des formes générales de a, b, c telles, que l'équation (1) puisse être résolue en nombres entiers. Je ferai voir, en particulier, que, a et b ayant des valeurs arbitraires, on pourra toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que cette résolution soit possible. Il est clair que, si l'on admettait pour Z la valeur 1, la dernière question serait immédiatement résolue, puisque, si c est de la forme $ax^m + by^m$, on a immédiatement la solution $(x, y, 1)$; mais ce n'est point d'une pareille solution qu'il s'agira par la suite. De plus, lorsque l'équation à résoudre aura une infinité de solutions, je donnerai des formules qui permettront de déduire d'une première solution une deuxième, de celle-ci une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

(*) m, n, a, b, c sont des nombres entiers donnés dont les deux premiers ont toujours des valeurs positives, X, Y, Z désignent les trois inconnues, et (x, y, z) représentera toujours, dans la suite, la solution de l'équation

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z.$$

Avant que le cas général soit abordé, les cas particuliers où, m étant égal à 3 ou 4, n est égal à 2, 3, 4, ... seront successivement traités.

2. La seule méthode suivie dans tout le cours du Mémoire est fondée sur l'emploi de certaines identités, dont quelques-unes sont intuitives, mais qui, pour la plupart, seront démontrées d'après les principes exposés par Lagrange dans le Chapitre IX des Additions à l'*Algèbre* d'Euler. Le grand géomètre termine ainsi ce Chapitre : « Mais en voilà assez sur ce sujet, que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occasion ». Dans un Mémoire qui a pour titre : *De quelques problèmes de l'Analyse de Diophante,* il ajoute encore ces mots : « Au reste, la méthode la plus simple et la plus générale pour résoudre ces sortes d'égalités (il s'agit de la résolution en nombres entiers des équations à trois inconnues) est peut-être celle des facteurs, que j'ai exposée dans le dernier Chapitre des Additions à l'*Algèbre* d'Euler ». Lagrange n'ayant pas tenu la promesse qu'il avait faite, j'ai essayé de deviner quelques-uns des développements qu'il aurait pu ajouter à son Chapitre IX. J'espère qu'on voudra bien me pardonner la témérité de ma tentative en faveur de quelques résultats nouveaux auxquels je suis parvenu.

II. — *Démonstration de quelques identités fondamentales.*

3. Les identités dont il s'agit seront obtenues en cherchant des fonctions du second, du troisième ou du quatrième degré, dans lesquelles le nombre des variables soit toujours égal au degré, et telles que, en multipliant deux fonctions de même espèce, on trouve un produit

de même espèce que ses deux facteurs. On indiquera ensuite le moyen général d'obtenir des identités correspondant à des fonctions d'un degré quelconque.

Bien que la résolution des équations dans lesquelles n est égal à 2 soit exclue de ce travail, je donne les identités qui se rapportent aux fonctions du second degré, parce qu'elles serviront à trouver des identités d'un degré supérieur.

4. Identités résultant de la considération des fonctions du second degré à deux variables. — Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'on multiplie une fonction du second degré* $x^2 + axy + by^2$ *par une fonction de même espèce* $x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2$, *on obtient toujours une fonction* $X^2 + aXY + bY^2$ *de même espèce que les deux autres.*

En effet, si l'on désigne par α, β les racines de l'équation du second degré

$$\frac{x^2}{y^2} + a\frac{x}{y} + b = 0,$$

dans laquelle $\frac{x}{y}$ est l'inconnue, on a

$$x^2 + axy + by^2 = y^2\left(\frac{x^2}{y^2} + a\frac{x}{y} + b\right)$$
$$= y^2\left(\frac{x}{y} - \alpha\right)\left(\frac{x}{y} - \beta\right) = (x - \alpha y)(x - \beta y),$$

et de même

$$x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2 = (x_1 - \alpha y_1)(x_1 - \beta y_1).$$

On a ensuite

$$(x - \alpha y)(x_1 - \alpha y_1) = xx_1 + \alpha^2 yy_1 - \alpha(xy_1 + yx_1)$$
$$= xx_1 - byy_1 - \alpha(xy_1 + yx_1 + ayy_1),$$

la dernière expression étant déduite de la précédente en remplaçant dans celle-ci α^2 par $-a\alpha - b$.

Si maintenant on pose

$$(2) \qquad X = xx_1 - byy_1, \quad Y = xy_1 + yx_1 + ayy_1,$$

il vient

$$(x - \alpha y)(x_1 - \alpha y_1) = X - \alpha Y,$$

et l'on a de même

$$(x - \beta y)(x_1 - \beta y_1) = X - \beta Y.$$

Alors, si l'on multiplie, membre à membre, les deux dernières égalités, on obtient l'identité

$$(3) \quad X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)(x_1^2 + ax_1y_1 + by_1^2),$$

qui démontre le théorème énoncé.

Ce théorème peut évidemment être étendu à un nombre quelconque de fonctions du second degré de même espèce. En effet, si l'on multiplie $X^2 + aXY + bY^2$, produit des deux premières fonctions par $x_2^2 + ax_2y_2 + by_2^2$, d'après le théorème démontré, le produit sera de la forme $X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2$, les fonctions X_1, Y_1 étant obtenues comme il suit. On remplace d'abord dans les formules (2) X, x, x_1, Y, y, y_1 respectivement par X_1, X, x_2, Y_1, Y, y_2, et l'on a ainsi

$$(4) \quad X_1 = Xx_2 - bYy_2, \quad Y_1 = Xy_2 + Yx_2 + aYy_2;$$

il ne reste plus alors qu'à substituer, dans ces dernières formules, à X et Y les expressions que donnent les formules (2). On pourra de même passer du cas de trois facteurs à celui de quatre facteurs, et ainsi de suite; mais nous voulons seulement nous arrêter au cas des facteurs égaux.

Si l'on considère d'abord le cas de deux facteurs égaux, on fait, dans les équations (2) et (3), $x_1 = x$, et, en

posant

$$Z = x^2 + axy + by^2, \tag{5}$$

on a l'identité

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^2, \tag{6}$$

X et Y étant données par les formules

$$X = x^2 - by^2, \quad Y = 2xy + ay^2. \tag{7}$$

Pour passer maintenant au cas de trois facteurs, il suffit de remplacer, dans les formules (4), x_2, y_2 par x, y et X, Y par les expressions que donnent les formules (7); on a ainsi

$$\begin{cases} X_1 = x^3 - 3bxy^2 - aby^3, \\ Y_1 = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3, \end{cases} \tag{8}$$

et l'identité

$$X_1^2 + aX_1Y_1 + bY_1^2 = Z^3 \tag{9}$$

est satisfaite par les valeurs de X_1, Y_1, Z que donnent les formules (8) et (5).

Traitons enfin le cas de quatre facteurs égaux. A cet effet, on remplace d'abord, dans les formules (2), X, x, x_1, Y, y, y_1 respectivement par X_2, X_1, x, Y_2, Y_1, y, puis, dans les formules ainsi obtenues, X_1, Y_1 par les valeurs que donnent les formules (8); on a ainsi

$$\begin{cases} X_2 = x^4 - 4abxy^3 - 6bx^2y^2 - b(a^2 - b)y^4, \\ Y_2 = 4x^3y + 4(a^2 - b)xy^3 + 6ax^2y^2 + a(a^2 - 2b)y^4, \end{cases} \tag{10}$$

et l'on satisfait à l'identité

$$X_2^2 + aX_2Y_2 + bY_2^2 = Z^4 \tag{11}$$

par les valeurs précédentes de X_2, Y_2, et toujours par la valeur de Z que donne la formule (5).

5. *Identités résultant de la considération des fonctions du troisième degré à trois variables.* — En suivant une méthode toute semblable à la précédente, Lagrange démontre que, si l'on multiplie entre elles des fonctions du troisième degré à trois variables de la forme

$$x^3 + cy^3 + c^2z^3 + (ab - 3c)xyz + ax^2y + bxy^2 + acy^2z + bcyz^2 + (a^2 - 2b)x^2z + (b^2 - 2ac)xz^2,$$

on obtient toujours une fonction de même forme. Mais, si l'on fait, dans cette expression, a et b nuls, elle se réduit à

$$x^3 + cy^3 + c^2z^3;$$

or, comme il n'est besoin ici que d'expressions de cette forme, pour simplifier les calculs, je modifierai la marche suivie par Lagrange.

λ et μ étant les racines cubiques imaginaires de l'unité, faisons le produit des trois facteurs $x + \lambda y + \lambda^2 z$, $x + \mu y + \mu^2 z$, $x + y + z$. Les deux premiers facteurs, après que l'on y a remplacé λ et μ par leurs valeurs, deviennent

$$\frac{1}{2}\left[2x - y - z + (y - z)\sqrt{-3}\right],$$

$$\frac{1}{2}\left[2x - y - z - (y - z)\sqrt{-3}\right],$$

et ont pour produit

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz.$$

En multipliant ensuite ce dernier produit par

$$x + y + z,$$

on a, pour le produit des trois facteurs,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz;$$

on obtient donc l'identité

$$(x+\lambda y+\lambda^2 z)(x+\mu y+\mu^2 z)(x+y+z)$$
$$=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

Si maintenant on désigne par α, β, γ les trois racines cubiques d'un nombre quelconque r, on a

$$\alpha=\lambda\gamma,\quad \beta=\mu\gamma,$$

et alors, en changeant dans l'identité précédente y et z en γy et $\gamma^2 z$, on a la nouvelle identité

$$(12)\quad \begin{cases} (x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z) \\ \quad =x^3+r y^3+r^2 z^3-3rxyz. \end{cases}$$

Cela posé, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on multiplie entre elles deux expressions de même forme que le second membre de l'identité* (12), *on obtient encore une expression de même forme.*

En effet, si l'on change x, y, z en x_1, y_1, z_1 dans l'identité (12) et que l'on multiplie, membre à membre, cette identité et celle qu'on en a déduit, on aura, dans le second membre de la nouvelle équation, l'indication du produit de deux fonctions de la forme considérée. Pour obtenir ensuite le développement de ce produit, on remarque que l'on a

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x_1+\alpha y_1+\alpha^2 z_1)$$
$$=xx_1+r(yz_1+zy_1)+(xy_1+yx_1+rzz_1)\alpha$$
$$+(xz_1+zx_1+yy_1)\alpha^2;$$

et, si l'on pose

$$(13)\quad \begin{cases} X=xx_1+r(yz_1+zy_1),\quad Y=xy_1+yx_1+rzz_1, \\ \qquad\qquad U=xz_1+zx_1+yy_1, \end{cases}$$

il vient

$$X + \alpha Y + \alpha^2 U = (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x_1 + \alpha y_1 + \alpha^2 z_1).$$

On a de même

$$X + \beta Y + \beta^2 U = (x + \beta y + \beta^2 z)(x_1 + \beta y_1 + \beta^2 z_1),$$
$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)(x_1 + \gamma y_1 + \gamma^2 z_1);$$

alors, en multipliant, membre à membre, les trois dernières équations, on a l'identité

$$\begin{aligned}(14)\qquad & X^3 + rY^3 + r^2U^3 - 3rXYU \\ & = (x^3 + ry^3 + r^2z^3 - 3rxyz) \\ & \quad \times (x_1^3 + ry_1^3 + r^2z_1^3 - 3rx_1y_1z_1)\end{aligned}$$

qui démontre le théorème énoncé.

Si dans l'identité précédente on fait x_1, y_1, z_1 respectivement égaux à x, y, z et que l'on pose

$$(15)\qquad Z = x^3 + ry^3 + r^2z^3 - 3rxyz,$$

on voit que l'on satisfera à l'équation

$$(16)\qquad X^3 + rY^3 + r^2U^3 - 3XYU = Z^3,$$

en déterminant Z par la formule (15) et X, Y, U par les formules

$$(17)\qquad X = x^2 + 2ryz, \quad Y = 2xy + rz^2, \quad U = 2xz + y^2,$$

que l'on déduit des formules (13) en y faisant x_1, y_1, z_1 respectivement égaux à x, y, z.

Maintenant, si l'on veut satisfaire à l'équation

$$(18)\qquad X_1^3 + rY_1^3 + r^2U_1^3 - 3rX_1Y_1U_1 = Z^3.$$

Z étant toujours donnée par la formule (15), on prendra les expressions de X_1, Y_1, U_1 déterminées par les for-

mules suivantes :

$$(19)\qquad \begin{cases} X_1 = x^3 + ry^3 + rz^3 + 6rxyz, \\ Y_1 = 3(x^2y + rxz^2 + ry^2z), \\ U_1 = 3(x^2z + ry^2 + rxy^2), \end{cases}$$

que l'on déduit des formules (13) en y remplaçant d'abord $X, x, x_1, \ldots$ par $X_1, X, x, \ldots$, puis X, Y, U par les expressions (17).

Enfin on satisfera à l'équation

$$(20)\qquad X_2^3 + rY_2^3 + r^2U_2^3 - 3rX_2Y_2U_2 = Z^3,$$

Z étant encore déterminée par la formule (15), en prenant

$$(21)\qquad \begin{cases} X_2 = x^4 + 4rxy^3 + 4r^2xz^3 + 12rx^2yz + 6r^2y^2z^2, \\ Y_2 = ry^4 + 4x^3y + 4r^2yz^3 + 12ry^2xz + 6rx^2z^2, \\ U_2 = r^2z^4 + 4x^3z + 4rzy^3 + 12z^2xy + 6x^2y^2. \end{cases}$$

Ces dernières formules s'obtiennent de la même manière que les précédentes, c'est-à-dire en remplaçant dans les formules (13) $X, x, x_1, \ldots$ par $X_2, X_1, x, \ldots$, puis X_1, Y_1, U_1 par les expressions (19).

6. *Identités résultant de la considération de certaines fonctions du quatrième degré à quatre variables.* — λ, μ, ν, ρ étant les quatre racines quatrièmes de l'unité, on multiplie les facteurs

$$x + \lambda y + \lambda^2 z + \lambda^3 u, \quad x + \mu y + \mu^2 z + \mu^3 u,$$
$$x + \nu y + \nu^2 z + \nu^3 u, \quad x + \rho y + \rho^2 z + \rho^3 u,$$

ou

$$x - z + (y - u)\sqrt{-1}, \quad x - z - (y - u)\sqrt{-1},$$
$$x + z + y + u, \quad x + z - y - u,$$

et l'on obtient pour produit la fonction

$$x^4 - y^4 + z^4 - u^4 - 2x^2z^2 + 2y^2u^2 - 4x^2yu - 4z^2yu + 4y^2xz + 4u^2xz.$$

Employant ensuite le même procédé que celui qui a donné le second membre de l'identité (12), on déduit de la fonction précédente celle-ci, qui est plus générale :

$$(22)\quad \begin{cases} x^4 - ry^4 + r^2z^4 - r^3u^4 - 2rx^2z^2 + 2r^2y^2u^2 \\ \quad - 4rx^2yu - 4r^2z^2yu + 4ry^2xz + 4r^2u^2xz, \end{cases}$$

et l'on démontre, de la même manière que le théorème II, le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'on multiplie entre elles deux fonctions du quatrième degré de la forme* (22), *on obtient pour produit une fonction de la même forme.*

En d'autres termes, si l'on pose

$$(23)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = xx_1 + rzz_1 + ryu_1 + ruy_1, \\ \mathrm{Y} = xy_1 + yx_1 + rzu_1 + ruz_1, \\ \mathrm{U} = xz_1 + zx_1 + yy_1 + ruu_1, \\ \mathrm{V} = xu_1 + ux_1 + yz_1 + zy_1, \end{cases}$$

on a l'identité

$$(24)\quad \begin{cases} \mathrm{X}^4 - r\mathrm{Y}^4 + r^2\mathrm{U}^4 - r^3\mathrm{V}^4 - 2r\mathrm{X}^2\mathrm{U}^2 + 2r^2\mathrm{Y}^2\mathrm{V}^2 \\ \quad - 4r\mathrm{X}^2\mathrm{YV} - 4r^2\mathrm{U}^2\mathrm{YV} + 4r\mathrm{Y}^2\mathrm{XU} + 4r^2\mathrm{V}^2\mathrm{XU} \\ \quad = (x^2 - ry^2 + \dots)(x_1^4 - ry_1^4 + \dots). \end{cases}$$

Supposons maintenant que, dans les formules (23) et dans l'identité (24), on fasse x_1, y_1, z_1, u_1 respectivement égaux à x, y, z, u et que l'on pose

$$(25)\quad \begin{cases} \mathrm{Z} = x^4 - ry^4 + r^2z^4 - r^3u^4 - 2rx^2z^2 \\ \qquad + 2r^2y^2u^2 - 4rx^2yu - 4r^2z^2yu \\ \qquad + 4ry^2xz + 4r^2u^2xz, \end{cases}$$

on voit que l'on satisfait à l'identité

$$(26)\quad \mathrm{X}^4 - r\mathrm{Y}^4 + r^2\mathrm{U}^4 + r^3\mathrm{V}^4 - 2r\mathrm{X}^2\mathrm{U}^2 - \dots = \mathrm{Z}^2.$$

en prenant l'expression de Z (25) et en déterminant X, Y, U, V par les formules

$$(27)\qquad \begin{cases} X = x^2 + rz^2 + 2ryu, \\ Y = 2(xy + rzu), \\ U = 2xz + y^2 + ru^2, \\ V = 2(xu + yz). \end{cases}$$

Si l'on veut maintenant satisfaire à l'équation

$$(28)\qquad X_1^4 - rY_1^4 + r^2U_1^4 - r^3V_1^4 + 2rX_1^2U_1^2 + \ldots = Z,$$

on prendra toujours l'expression de Z (25), et l'on aura

$$(29)\qquad \begin{cases} X_1 = 3rxz^2 + 3ry^2z + 3r^2zu^2 + 6rxyu + x^3, \\ Y_1 = 3x^2y + 3ryz^2 + 3ry^2u + 6rxzu + r^2u^3, \\ U_1 = 3x^2z + 3xy^2 + 3rxu^2 + 6ryzu + rz^3, \\ V_1 = 3x^2u + 3rz^2u + 3ry^2u^2 + 6xyz + y^3. \end{cases}$$

Ces dernières formules se déduisent facilement des formules (23) et (27).

Nous ne donnerons pas ici les expressions générales de X_2, Y_2, U_2, V_2 satisfaisant à l'équation

$$(30)\qquad X_2^4 - rY_2^4 + \ldots = Z^4,$$

parce que ces expressions sont compliquées et qu'elles ne seront pas employées dans ce travail, du moins dans leur généralité.

7. *Généralisation des résultats précédents.*

La question générale que nous nous proposons de résoudre est celle-ci : α, β, γ, ... étant les racines de l'équation

$$(31)\qquad \xi^m - r = 0,$$

et x_0, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, m quantités quelconques, trou-

ver l'expression du produit des m fonctions

$$x_0 + x_1\alpha + x_2\alpha^2 + \ldots + x_{m-1}\alpha^{m-1},$$
$$x_0 + x_1\beta + x_2\beta^2 + \ldots + x_{m-1}\beta^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on pose

$$x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \ldots + x_{m-1}\xi^{m-1} = \pi,$$

et que l'on élimine ξ entre l'équation (31) et la précédente, on aura une équation du degré m en π, dans laquelle le terme indépendant de cette variable sera, à un facteur constant près K, le produit demandé que nous désignerons par P. Il s'ensuit que KP sera le résultat de l'élimination de ξ entre l'équation (31) et l'équation

$$(32) \qquad x_0 + x_1\xi + x_2\xi^2 + \ldots + x_{m-1}\xi^{m-1} = 0.$$

Pour faire cette élimination, multiplions m fois par ξ les deux membres de l'équation (32), mais en ayant soin, après chaque multiplication, de remplacer ξ^{m+1} par la quantité $r\xi$, qui lui est égale en vertu de l'équation (31). On est alors ramené à éliminer m inconnues $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^m$ entre les m équations homogènes du premier degré

$$(33) \quad \begin{cases} x_0\xi + x_1\xi^2 + \ldots + x_{m-2}\xi^{m-1} + x_{m-1}\xi^m = 0, \\ rx_{m-1}\xi + x_0\xi^2 + \ldots + x_{m-3}\xi^{m-1} + x_{m-2}\xi^m = 0, \\ rx_{m-2}\xi + rx_{m-1}\xi^2 + \ldots + x_{m-4}\xi^{m-1} + x_{m-3}\xi^m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ rx_1\xi + rx_2\xi^2 + \ldots + rx_{m-1}\xi^{m-1} + x_0\xi^m = 0, \end{cases}$$

et le résultat de l'élimination se trouve représenté par le déterminant

$$(34) \quad \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{m-2} & x_{m-1} \\ rx_{m-1} & x_0 & \ldots & x_{m-3} & x_{m-2} \\ rx_{m-2} & rx_{m-1} & \ldots & x_{m-1} & x_{m-3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ rx_1 & rx_2 & \ldots & rx_{m-1} & x_0 \end{vmatrix},$$

dont le mode de formation est suffisamment indiqué. On remarquera que r est facteur du premier terme de la seconde ligne, qu'il est facteur des deux premiers termes de la troisième ligne, et ainsi de suite, de telle sorte qu'il est facteur des $m-1$ premiers termes de la dernière ligne.

Quant au facteur K, il est égal à 1, car le produit demandé et le déterminant contiennent tous deux le terme x_0^m.

Nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant, qui comprend, comme cas particuliers, les théorèmes II et III.

Théorème IV. — *Si l'on multiplie entre elles une fonction du degré m représentée par le déterminant général et une fonction de même espèce, on obtient une autre fonction de même espèce que les deux autres.*

En se reportant aux démonstrations particulières données aux n^os^ 5 et 6, on voit que tout revient à démontrer qu'en multipliant l'un par l'autre les deux facteurs

$$x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_{m-1}\alpha^{m-1}, \quad x'_0 + x'_1\alpha + \ldots + x'_{m-1}\alpha^{m-1},$$

on obtient un produit de même forme. Or, en effectuant la multiplication, on a

$x_0x'_0 + x_1x'_0$	$\alpha + x_2x'_0$	$\alpha^2 + \ldots + x_{m-1}x'_0$	α^{m-1}
$+ rx_{m-1}x'_1 + x_0x'_1$	$+ x_1x'_1$	$+ x_{m-2}x'_1$	
$+ rx_{m-2}x'_2 + rx_{m-1}x'_2$	$+ x_0x'_2$	$+ \ldots\ldots$	
$+ \ldots\ldots + \ldots\ldots$	$+ rx_{m-1}x'_3$	$+ x_0x'_{m-1}$	
$\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots$	$+ rx_3x'_{m-1}$		
$+ rx_1x'_{m-1} + rx_2x'_{m-1}$	$+ \ldots\ldots$		

Si donc on pose

$$X_0 = x_0x'_0 + r(x_{m-1}x'_1 + x_{m-2}x'_2 + \ldots + x_1x'_{m-1}),$$
$$X_1 = x_1x'_0 + x_0x'_1 + r(x_{m-1}x'_2 + \ldots + x_2x'_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{m-1} = x_{m-1}x'_0 + x_{m-2}x'_1 + \ldots + x_0x'_{m-1},$$

on obtient la fonction $X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{m-1} z^{m-1}$. de même espèce que les deux premières.

On voit, d'ailleurs, immédiatement de quelle manière se forme la fonction X_0, et comment les autres fonctions s'en déduisent par la permutation circulaire des indices $0, 1, 2 \ldots m-1$ dans les premiers facteurs de chaque terme. On remarque encore que r est multiplicateur de tous les termes, excepté un dans la première formule, excepté deux dans la seconde, et ainsi de suite, de telle sorte que, dans la dernière formule, r n'est multiplicateur d'aucun terme.

On pourra maintenant, si l'on veut, obtenir les valeurs de $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$ correspondant aux cas où l'on multiplie entre eux un nombre quelconque de facteurs égaux.

III. — Résolution en nombres entiers de l'équation

$$aX^3 + bY^3 = cZ^n,$$

n étant égal à 2, 3 ou 4, etc.

8. *Résolution de l'équation*

35 $$aX^3 + bY^3 = Z^3.$$

On a supposé ici que c était égal à 1, car, s'il en était autrement, on multiplierait les deux membres de l'équation par c et l'on poserait

$$cZ = Z_1.$$

Maintenant, si l'on fait U égal à zéro, l'identité (16) devient

36 $$X^3 - rY^3 = Z^3,$$

et la dernière des formules (17) donne

$$z = -\frac{y^2}{2x}.$$

Alors, en substituant cette valeur de z dans les expressions de X, Y, Z (17) et (15), on a

$$X = \frac{4x(x^3 - ry^3)}{4x^2}, \quad Y = \frac{y(8x^3 + ry^3)}{4x^2},$$
$$Z = \frac{8x^6 + 20rx^3y^3 - r^2y^6}{8x^2};$$

et, en remplaçant dans l'équation (36) X, Y, Z par les expressions précédentes, puis r par $\frac{b}{a}$, on obtient l'identité

$$a\left[4x\left(ax^3 - by^3\right)\right]^3 + b\left[y\left(8ax^3 + by^3\right)\right]^3 = \left(8a^2x^6 + 20abx^3y^3 - b^2y^6\right)^2.$$

Il suit de là que l'équation (35) a une infinité de solutions entières données par les formules

$$X = 4x(ax^3 - by^3),$$
$$Y = y(8ax^3 + by^3),$$
$$Z = 8a^2x^6 + 20abx^3y^3 - b^2y^6,$$

dans lesquelles x et y sont deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.

9. *Recherche des cas où l'on peut résoudre en nombres entiers l'équation*

(37) $$aX^3 + bY^3 = cZ^3.$$

Si l'on essaye d'imiter la méthode suivie dans le numéro précédent, en faisant U = 0 dans la dernière des formules (19), on est conduit à l'équation

$$x^2z + ry^2 + rz^2 = 0;$$

mais, cette équation étant du second degré par rapport aux trois variables x, y, z, on ne pourra pas trouver ainsi une infinité de solutions de l'équation (37), quels que soient a, b, c. On sait d'ailleurs que l'équation (37) est souvent impossible : nous allons donc chercher un certain nombre de cas où elle peut être résolue en nombres entiers, en partant d'identités que nous allons d'abord établir.

Prenons pour point de départ l'identité évidente

$$(38) \qquad (X+Y)^3+(X-Y)^3=2(X^2+3Y^2)X.$$

En y faisant $X=x^3$, $Y=y$, on a d'abord

$$(39) \qquad (x^3+y)^3+(x^3-y)^3=2(x^6+3y^2)x^3.$$

Faisons maintenant dans l'identité (38) un changement de variables tel, que X^2+3Y^2 devienne un cube. Pour cela donnons à a et b respectivement les valeurs 0 et 3 dans les équations (5), (8) et (9) du n°4 : on a ainsi

$$X=x^3-9y^2x, \quad Y=3x^2y-3y^3, \quad Z=x^2+3y^2,$$
$$X^2+3Y^2=(x^2+3y^2)^3;$$

et, en remplaçant dans l'identité (38) X, Y, Z, X^2+3Y^2 par les expressions précédentes, on a, après le changement de y en $\frac{y}{3}$,

$$(9x^3-9xy^2+9x^2y-y^3)^3+(9x^3-9xy^2-9x^2y+y^3)^3$$
$$=(x-y)(x+y)2x[3(3x^2+y^2)]^3.$$

Comme, dans le produit $(x-y)(x+y)2x$, le troisième facteur est la somme des deux autres, on pose

$$x+y=x_1, \quad x-y=y_1,$$

et, si l'on remplace dans l'identité précédente x et y

par $\frac{x_1+y_1}{2}$, $\frac{x_1-y_1}{2}$, on a, en effaçant les accents,

$$(40)\quad \begin{cases} [x^3-y^3+3xy(2x-y)]^3+[y^3-x^3+3xy(2y+x)]^3 \\ \quad =xy(x+y)[3(x^2+xy+y^2)]^3. \end{cases}$$

En changeant, dans cette dernière identité, y en y^3-x, on a celle-ci :

$$(41)\quad \begin{cases} -x^3-y^9+6xy^6-3x^2y^3)^3+(x^3+y^9+3xy^6-6x^2y^3)^3 \\ \quad =x(y^3-x)[3y(x^2-xy^3+y^6)]^3. \end{cases}$$

L'identité (40) a déjà été donnée par M. E. Lucas, qui y a été conduit par des considérations géométriques; on peut encore la démontrer comme il suit.

Si l'on part des équations (18) et (19) du n° 5, en égalant U à zéro, on a

$$r=-\frac{x(xz+y^2)}{yz^2},$$

et, par suite,

$$X_1=-\frac{x}{y^2z^2}(y^6+3x^2y^2z^2-x^3z^3+6xzy^4),$$

$$Y_1=-\frac{3x}{yz}(y^4+x^2z^2+xzy^2),$$

$$U_1=\frac{x}{y^2z^2}(x^3z^3+3xzy^4+6x^2y^2z^2-y^6).$$

Alors, en substituant, dans l'équation (18), pour X_1, Y_1, U_1, les expressions précédentes, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}&[y^6-x^3z^3+3xzy^2(2y^2+xz)]^3\\&\quad+[x^3z^3-y^6+3xzy^2(2xz+y^2)]^3\\&\quad=xzy^2(xz+y^2)[3(y^4+x^2z^2+xzy^2)]^3;\end{aligned}$$

mais, si l'on y fait

$$y^2=x_1,\quad xz=y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a l'identité (40).

Pour obtenir une nouvelle identité, faisons a et b égaux à 1 dans les équations (5), (8) et (9); alors on a

$$\begin{aligned} X &= x^3 - 3xy^2 - y^3, \\ Y &= 3xy(x+y), \\ X^2 + XY + Y^2 &= (x^2 + xy + y^2)^3, \\ X - Y &= x^3 - y^3 - 3xy(2x+y). \end{aligned}$$

Si maintenant on multiplie, membre à membre, les deux dernières équations, il vient

$$X^3 - Y^3 = [x^3 - y^3 - 3xy(x+2y)](x^2 + xy + y^2)^3,$$

ou

$$(42) \quad \begin{cases} (x^3 - 3xy^2 - y^3)^3 - [3xy(x+y)]^3 \\ \quad = [x^3 - y^3 - 3xy(x+2y)](x^2 + xy + y^2)^3. \end{cases}$$

C'est l'identité qu'il s'agissait de trouver

Remarque. — L'identité (42) conduit à une nouvelle démonstration de l'identité (40).

En effet, si l'on permute x, y dans l'identité (42) et que l'on retranche, membre à membre, cette dernière identité de celle qu'on a obtenue, on a

$$\begin{aligned} &(x^3 - y^3 + 3x^2y)^3 + (x^3 - y^3 - 3xy^2)^3 \\ &\quad = (x-y)(x+2y)(2x+y)(x^2 + xy + y^2)^3. \end{aligned}$$

Or, comme dans le produit $(x-y)(x+2y)(2x+y)$ le troisième facteur est égal à la somme des deux autres, par un changement de variables dont le choix est évident, on est conduit à l'identité (40).

Je vais maintenant démontrer une identité plus générale que les précédentes, et qui donnera quelques-unes d'entre elles comme cas particuliers.

D'après le théorème I (2) étendu à quatre facteurs dont trois sont égaux, on peut écrire

$$X_1^2 + X_1Y_1 + Y_1^2 = (x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2)(x^2 + xy + y^2)^3,$$

ou

$$(43)\quad X_1^3 - Y_1^3 = (X_1 - Y_1)(x_1^2 - x_1 y_1 + y_1^2)(x^2 + xy - y^2)^3.$$

X_1 et Y_1 sont d'ailleurs obtenus en remplaçant, dans les formules (2), d'abord X, Y, x, y, a, b respectivement par X_1, Y_1, X, Y, 1, 1, puis X, Y par les expressions que donnent les formules (8), c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned}
X_1 &= x^3 x_1 - 3xy^2 x_1 - y^3 x_1 - 3x^2 y y_1 - 3xy^2 y_1,\\
Y_1 &= x^3 y_1 - y^3 y_1 + 3x^2 y y_1 + 3x^2 y x_1 + 3xy^2 x_1,\\
X_1 - Y_1 &= (x^3 - y^3 - 6xy^2 - 3x^2 y)\, x_1\\
&\quad + (y^3 - x^3 - 6x^2 y - 3xy^2)\, y_1.
\end{aligned}$$

On voit alors que, a et b étant égaux à 1 dans l'équation (37), on pourra prendre pour c la valeur donnée par la formule

$$(44)\qquad c = (X_1 - Y_1)(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2),$$

l'expression de $X_1 - Y_1$ étant obtenue par la dernière équation.

Il est visible d'abord que, si dans l'expression (44) on fait successivement $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, et $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, on trouve pour c les valeurs données par les identités (40) et (42); ces identités elles-mêmes sont donc la conséquence de l'identité générale.

Donnons encore à x_1 et y_1 les valeurs x et $-y$; alors on a

$$c = (x^3 + y^3)(x - y)^3,$$

et l'identité générale devient

$$(45)\quad [x(x^3 + 2y^3)]^3 + [-y(y^3 + 2x^3)]^3 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3)^3.$$

On peut conclure de tout ce qui précède que, si dans l'équation (37) a et b sont égaux à 1, cette équation

pourra être résolue lorsque c aura l'une des formes suivantes :

$$2(x^6+3y^2), \quad xy(x+y), \quad x(y^3-x),$$
$$x^3-y^3-3xy(x+2y), \quad x^3+y^3.$$

Toutes ces formes, à l'exception de la première, dérivent de la forme générale (44); mais elles sont toutes utiles à connaître pour les applications numériques.

Je vais maintenant établir des identités correspondant au cas où a et b ont des valeurs quelconques. Supposons que la fonction Z (15) soit multipliée par la fonction $x_1^3+ry_1^3+r^2z_1^3-3rx_1y_1z_1$, que nous représentons par Z_1, et, pour plus de simplicité dans les calculs, faisons d'abord $z=0$ dans les formules (15) et (19); ce qui donne

$$X=x^3+ry^3, \quad Y=3x^2y, \quad U=3xy^2, \quad Z=x^3+ry^3.$$

Si l'on suppose maintenant que le second membre de l'identité (18) soit multiplié par Z_1, et que l'on désigne par X', Y', U' les valeurs qui remplacent X_1, Y_1, U_1 dans le premier membre, on aura par le calcul ordinaire, mais en posant, pour plus de simplicité, $y_1=1$, $z_1=0$,

$$X'=(x^3+ry^3)x_1+3rxy^2,$$
$$Y'=x^3+ry^3+3x^2yx_1,$$
$$U'=3xy(yx_1+x).$$

On a aussi

$$Z_1=x_1^3+r.$$

En égalant U' à zéro, on a

$$x_1=-\frac{x}{y},$$

et, en substituant cette valeur de x_1 dans X', Y', Z_1, on a

$$X'=\frac{x(2ry^3-x^3)}{y}, \quad Y'=\frac{-y(2x^3-ry^3)}{y}, \quad Z_1=\frac{ry^3-x^3}{y^3};$$

d'où, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, on déduit l'identité

$$(46)\quad \begin{cases} a[x(ax^3+2by^3)]^3+b[-y(2ax^3+by^3)]^3 \\ \quad =(ax^3+by^3)(ax^3-by^3)^3. \end{cases}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème V. — *a et b ayant des valeurs quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation* (37) *puisse être résolue en nombres entiers, Z étant différent de l'unité.*

On peut trouver pour c une expression qui contienne autant de variables que l'on veut, en multipliant successivement les deux membres de l'équation (18) par des fonctions $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ (on désigne, en général, par Z_p la fonction $x_p^3+ry_p^3+r^2z_p^3-3rx_py_pz_p$) et en remplaçant, dans le premier membre, X_1, Y_1, U_1 par les fonctions qui correspondent à la dernière multiplication. On égalerait ensuite à zéro la fonction que remplace U après les multiplications. On pourra d'ailleurs disposer des indéterminées pour trouver autant d'identités que l'on voudra, plus ou moins simples. Si, par exemple, on multiplie par deux facteurs Z_1, Z_2, et que l'on fasse, pour simplifier,

$$z=0,\quad x_1=-\frac{x^3+ry^3}{3x^2y},\quad y_1=1,$$
$$z_1=0,\quad x_2=0,\quad z_2=0,\quad y_2=1,$$

en effectuant les calculs ordinaires, on tombe sur l'identité

$$(47)\quad \begin{cases} a[3bxy^2(by^3-2ax^3)]^3+b(a^2x^6+b^2y^6-7abx^3y^3)^3 \\ \quad =b(a^3x^9+b^3y^9-24a^2bx^6y^3+3ab^2x^3y^6)(ax^3+by^3)^3, \end{cases}$$

qui conduit à une nouvelle forme de c correspondant à des valeurs arbitraires de a et b.

10. *Recherche des formules qui permettent de déduire d'une première solution de l'équation* (37) *une infinité d'autres solutions.*

Premier cas. — *a et b sont égaux à l'unité.* Supposons que, dans l'identité (45), x et y, au lieu d'être des nombres entiers quelconques, forment avec une troisième variable z une solution de l'équation (37); alors, dans cette identité, on peut remplacer x^3+y^3 par cz^3, et son second membre peut s'écrire $c[z(x^3-y^3)]^3$. Il suit de là que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (37), on aura une seconde solution X, Y, Z par les formules

$$(48)\qquad \begin{cases} X = x(x^3+2y^3), \\ Y = -y(2x^3+y^3), \\ Z = z(x^3+y^3); \end{cases}$$

ce sont les formules de Prestet et d'Euler.

On voit de même que, si l'on change, dans l'identité (40), x et y en x^3 et y^3, puis que l'on remplace x^3+y^3 par cz^3, à une première solution (x, y, z) de l'équation (37) correspond une seconde solution (X, Y, Z), donnée par les formules

$$(49)\qquad \begin{cases} X = x^9 - y^9 + 3x^3y^3(2x^3+y^3), \\ Y = y^9 - x^9 + 3x^3y^3(2y^3+x^3), \\ Z = 3xyz(x^6+x^3y^3+y^6). \end{cases}$$

Ces dernières formules sont dues à M. Lucas.

Deuxième cas. — *a et b sont des nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs.* Remplaçons, dans l'identité (46), ax^3+by^3 par cz^3; on voit alors que, en désignant par (x, y, z), (X, Y, Z) deux solutions de l'équation (37), on a les formules suivantes, telles qu'on

les déduit de la méthode de Lagrange (*) :

$$(50)\qquad \begin{cases} X = x(ax^3 + 2by^3), \\ Y = -y(2ax^3 + by^3), \\ Z = z(ax^3 - by^3). \end{cases}$$

11. *Formules qui donnent une troisième solution de l'équation* (37) *lorsqu'on en connaît deux autres.*

Soient (x, y, z), (x', y', z') les deux premières solutions et (x'', y'', z'') la troisième. En exprimant que (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions de l'équation, on obtient

$$\frac{a}{z^3y'^3 - y^3z'^3} = \frac{b}{x^3z'^3 - z^3x'^3} = \frac{c}{x^3y'^3 - y^3x'^3};$$

a, b, c peuvent donc être considérés comme respectivement égaux aux binômes $z^3y'^3 - y^3z'^3$, $x^3z'^3 - z^3x'^3$, $x^3y'^3 - y^3x'^3$.

Cela posé, ajoutant, membre à membre, les deux identités évidentes

$$u^2 - v^3 - v^2 - u^3 = (u^3 - v^3)(u^3 + v^3 + 1 - 3uv),$$
$$uv^2 - u^3 - vu^2 - v^3 = (u^3 - v^3)(-u^3 - v^3 - u^3v^3 + 3u^2v^2),$$

on a

$$(1 - v^3)(u^2 - v)^3 + (u^3 - 1)(v^2 - u)^3 = (u^3 - v^3)(1 - uv)^3,$$

ou encore, après avoir remplacé u et v respectivement par $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$,

$$(y'^3 - y^3)(x^2y' - x'^2y)^3 + (x^3 - x'^3)(y^2x' - xy'^2)^3 = (x^3y'^3 - y^3x'^3)(x'y' - xy)^3 \quad (**).$$

(*) *Voir* le Mémoire de Lagrange déjà cité en commençant : *De quelques problèmes de l'Analyse de Diophante.*

(**) Cette identité montre que l'on peut trouver une infinité de nombres entiers qui soient, de deux manières différentes, la somme de trois cubes entiers.

Si maintenant on change, dans l'identité précédente, x, y, x', y' en $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$, il vient

$$(z^3y'^3 - y^3z'^3)(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + (x^3z'^3 - z^3x'^3)(y^2x'z' - y'^2xz)^3 = (x^3y'^3 - y^3x'^3)(z^2x'y' - z'^2xy)^3,$$

ou encore, en tenant compte de la remarque faite en commençant,

$$a(x^2y'z' - x'^2yz)^3 + b(y^2x'z' - y'^2xz)^3 = c(z^2x'y' - z'^2xy)^3;$$

on a donc les formules demandées

$$(51)\qquad \begin{cases} x'' = x^2y'z' - x'^2yz, \\ y'' = y^2x'z' - y'^2xz, \\ z'' = z^2x'y' - z'^2xy. \end{cases}$$

Les formules précédentes sont plus simples que celles de Cauchy; mais elles s'en déduisent aisément et donnent, d'ailleurs, la même solution. On voit aussi, à l'aide de ces mêmes formules, que, si l'on avait la relation

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} + \frac{z'}{z} = 0,$$

on retomberait sur la solution (x, y, z): il en est ainsi, par exemple, lorsque (x, y, z), (x', y', z') sont deux solutions consécutives données par les formules de Lagrange.

12. *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$(52)\qquad aX^3 + bY^3 = cV^3.$$

On multiplie les deux membres de l'équation (20) par un facteur Z_1, défini comme au n° 9, et, en posant

$$z = 0, \quad z_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad r = \frac{b}{a},$$

par un calcul tout semblable à celui qui a donné l'identité (46), on obtient

$$53)\quad \begin{cases} a[x(4a^2x^6 - 19abx^3y^3 - 4b^2y^6)]^3 \\ \quad + b[y(10a^2x^6 - 16abx^3y^3 + b^2y^6)]^3 \\ \quad = (64a^3x^9 - 168a^2bx^6y^3 + 12ab^2x^3y^6 + b^2y^9)(ax^3 + by^3)^3. \end{cases}$$

Et ainsi se trouve démontré le théorème suivant :

Théorème VI. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on pourra trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation* (52) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Nous nous arrêtons ici dans la résolution de l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^n$; car on voit assez, par ce qui précède, comment on trouvera, pour toutes les valeurs de n, une identité analogue à l'identité (53).

13. En partant des identités fondamentales qui ont été établies dans la Section II, on peut quelquefois parvenir à des identités qui conduisent à la résolution de nouvelles équations. J'en citerai un seul exemple.

On déduit d'abord aisément des équations (15), (16) et (17) celle-ci :

$$\begin{aligned} Z^2 + 3XYU = {} & (x^3 + ry^3 + r^2z^3 + 6rxyz)^2 \\ & + 6r(y^2 - xz)(x^2 - ryz)(rz^2 - xy); \end{aligned}$$

d'où il suit que, si l'on résout par rapport à x, y ou z l'une des équations

$$y^2 = xz, \quad x^2 = ryz, \quad rz^2 = xy,$$

le second membre de l'identité précédente se réduit à un carré. Si l'on prend, par exemple, z égal à $\frac{y^2}{x}$, ce second membre devient $\frac{(x^6 + 7rx^3y^3 + r^2y^6)^2}{x^6}$, et les valeurs de X, Y, U, Z s'obtiennent en remplaçant dans les

formules (15) et (17) z par $\frac{y^2}{x}$. Si alors, comme à l'ordinaire, on change r en $\frac{b}{a}$, on a finalement l'identité

$$(54)\quad \left\{\begin{array}{l} a[x(ax^3+2by^3)]^3+b[y(by^3+2ax^3)]^3+a^2b^2(3x^2y^2)^3 \\ \quad =(a^2x^6+7abx^3y^3+b^2y^6)^3, \end{array}\right.$$

à laquelle M. Lucas est aussi parvenu, mais autrement. L'identité (54) donne évidemment le moyen d'obtenir une infinité de solutions de l'équation

$$aX^3+bY^3+a^2b^2U^3=Z^2.$$

IV. — Résolution de l'équation $aX^4+bY^4=cZ^n$, n avant les valeurs 2, 3, 4, etc.

14. *Identités relatives à la résolution de l'équation*

$$(55)\qquad aX^4+bY^4=cZ^2.$$

En égalant à zéro les valeurs de U et V données par les formules (27) et en résolvant les deux équations ainsi obtenues par rapport à x et r, on a

$$x=\frac{-yz}{u},\qquad r=\frac{y(2z^2-yu)}{u^3}.$$

Si l'on substitue ensuite les valeurs précédentes de x et r dans les expressions de X et Y (27), et dans celle de Z (25), on a

$$X=\frac{2y(z^4-y^2u^2+2yuz^2)}{u^5},\qquad Y=\frac{4yzu(z^2-yu)}{u^3},$$

$$Z=\frac{4y^2}{u^6}(z^8+y^4u^4+10y^2z^4u^2-4y^3z^2u^3-12yuz^6),$$

et, par suite, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}&(z^4-y^2u^2-2yuz^2)^4+z^4yu(yu-2z^2)[2(z^2-yu)]^4\\&\quad=(z^8+y^4u^4+10y^2u^2z^4-4z^2y^3u^3-12yuz^6)^2.\end{aligned}$$

Si maintenant on pose

$$z^2 = x_1, \quad yu = -y_1,$$

et que l'on efface les accents, on a

$$(56) \quad \begin{cases} (y^2 + 2xy - x^2)^4 + yx^2(y + 2x)(2x + 2y)^4 \\ \qquad = (x^4 + y^4 + 10x^2y^2 + 4y^3x + 12yx^3)^2. \end{cases}$$

De l'identité précédente, on peut déduire plusieurs autres. Si d'abord on y remplace y par $y_1 - x$, et qu'après la substitution on change x^2 en x, puis que l'on efface les accents, on a

$$(57) \quad (y^2 - 2x)^4 + x(y^2 - x)(2y)^4 = (y^4 - 4x^2 + 4xy^2)^2.$$

Changeons maintenant dans l'identité (57) x en $-xy$, et il viendra

$$(58) \quad (y + 2x)^4 - xy^2(x + y) \times 2^4 = (y^2 - 4x^2 - 4xy)^2.$$

Enfin, si dans cette dernière identité on pose

$$x = \frac{(x_1 - y_1)^2}{2}, \quad y = 2x_1y_1,$$

puis que l'on efface les accents, on a

$$(59) \quad (x^2 + y^2)^4 - x^2y^2(x^2 - y^2)^2 \times 2^4 = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2)^2.$$

Les identités (56), (57), (58) et (59) montrent que l'équation (55) peut être résolue, lorsque, a et c étant égaux à l'unité, b est de l'une des formes $yx^2(y + 2x)$, $y(y + 2x^2)$, $x(y^2 - x)$, $-xy^2(x + y)$, $-x(x + y^2)$, $-x^2y^2(x^2 - y^2)^2$.

La dernière forme se rapporte au cas des nombres congruents par rapport à deux carrés. On voit, en effet, que l'identité (59) se décompose en ces deux autres

$$(60) \quad (x^2 + y^2)^2 + xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 + 2xy)^2,$$

$$(61) \quad (x^2 + y^2)^2 - xy(x^2 - y^2) \times 2^2 = (x^2 - y^2 - 2xy)^2,$$

et qu'ainsi on peut trouver des valeurs de X, Y, U et V satisfaisant en même temps aux deux équations

$$X^2 + aY^2 = U^2, \quad X^2 - aY^2 = V^2,$$

lorsque a est de la forme $xy(x^2 - y^2)$. On prouve d'ailleurs aisément que la condition est nécessaire.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours trouver une infinité de valeurs de c, telles que l'équation* (55) *puisse être résolue en nombres entiers.*

En faisant d'abord dans les formules (27) $z = 0$, $u = 0$, on a

$$X = x^2, \quad Y = 2xy, \quad U = y^2, \quad V = 0.$$

Si l'on remplace ensuite dans les formules (23) X, x, ... respectivement par X', X, ..., et que l'on y fasse $z_1 = 1$, $u_1 = 0$, on a

$$X' = Xx_1 + rU + rVy_1, \quad Y' = Xy_1 + Yx_1 + rV,$$
$$U' = X + Ux_1 + Yy_1, \quad V' = Vx_1 + Y + Uy_1;$$

et, en mettant dans ces dernières formules les expressions de X, Y, U, V que donnent les précédentes, on a

$$X' = x^2x_1 + ry^2, \quad Y' = 2xyx_1 + x^2y_1,$$
$$U' = y^2x_1 + 2xyy_1 + x^2, \quad V' = y^2y_1 + 2xy.$$

Si ensuite on égale à zéro U' et V', et que l'on résolve, par rapport à x_1 et y_1, les équations ainsi obtenues, on a

$$x_1 = \frac{3x^2}{y^2}, \quad y_1 = \frac{-2x}{y};$$

et, en substituant ces valeurs de x_1, y_1 dans X', Y' et dans Z_1 [Z_1 désigne le résultat de la substitution de x_1,

x_1, z_1 à x, y, z dans l'expression (25) de Z], on obtient

$$X' = \frac{3x^4 + ry^4}{y^2}, \quad Y' = \frac{4x^3y}{y^2}, \quad Z_1 = \frac{81x^8 + 14rx^4y^4 + r^2y^8}{y^8}.$$

Multipliant maintenant par Z_1 les deux membres de l'équation (26), où l'on remplace X, Y, U, V respectivement par X', Y', o, o, les nouvelles valeurs de X, Y, Z, c'est-à-dire X', Y', Z_1, étant données par les formules précédentes, après avoir remplacé r par $\frac{-b}{a}$, on aura l'identité

$$(62) \quad \begin{cases} a(3ax^4 - by^4)^4 + b(4ax^3y)^4 \\ \qquad = (81a^2x^8 - 14a^2bx^4y^4 + ab^2y^8)(ax^4 + by^4)^2. \end{cases}$$

Le théorème VII se trouve ainsi démontré.

15. *Recherche des formules qui donnent une infinité de solutions de l'équation* (55) *lorsque l'on connaît une première solution, mais seulement dans le cas où a et c sont égaux à* 1.

Si l'on fait $a = 0$ et que l'on change b en $-b$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) du n° 4, on a

$$X_2^2 - bY_2^2 = Z^4,$$
$$X_2 = x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4,$$
$$Y^2 = 4xy(x^2 + by^2), \quad Z = x^2 - by^2;$$

et, par suite, il vient

$$(x^4 + 6bx^2y^2 + b^2y^4)^2 - 16bx^2y^2(x^2 + by^2)^2 = (x^2 - by^2)^4.$$

Changeons maintenant dans l'identité précédente x, y en x^2, y^2, puis supposons que (x, y, z) soit une solution de l'équation

$$(63) \qquad X^4 + bY^4 = Z^2;$$

alors, de l'identité précédente, on déduit

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

De là il suit que, (x, y, z) étant une première solution de l'équation (63), on en aura une seconde (X, Y, Z) par les formules

$$(64)\quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + 4bx^4y^4.$$

Les formules précédentes sont dues à Lagrange, qui les démontre, moins simplement que nous l'avons fait, dans son Mémoire déjà plusieurs fois cité (*); mais son analyse a l'avantage de pouvoir s'étendre sans modification au cas où l'équation (63) contient en plus le terme dx^2y^2. Il suffit, en effet, de prendre pour point de départ, au lieu de l'identité employée par Lagrange,

$$(x^2 - by^2)^2 + b(2xy)^2 = (x^2 + by^2)^2,$$

l'identité un peu plus générale (6). On a alors les formules

$$(65)\quad X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 + (4b - d^2)x^4y^4.$$

Remarque. — On peut encore donner plusieurs autres démonstrations des formules (64). On les démontre d'abord très-simplement par la méthode de Fermat, et aussi par un moyen que j'ai indiqué dans les *Nouvelles Annales* (**) : voici encore une nouvelle manière de les démontrer.

Remplaçant dans les formules (25) et (27) z par t et r par $-b$, puis résolvant par rapport à t et u les équations que l'on obtient en égalant à zéro U et V, on a

$$u = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 + by^4}}{-by}, \quad t = -\frac{xu}{y}.$$

(*) Voyez le t. IV des *Œuvres de Lagrange*, p. 395. — Édition Serret.

(**) *Voir* la question 1324, numéro d'août 1879.

Or, si l'on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation (63), il vient

$$u = -\frac{x^2 + z}{by}, \quad t = \frac{x(x^2 + z)}{by^2};$$

et, en substituant ces valeurs de u et t dans les expressions de X, Y, Z données par les formules (25) et (27), on a

$$X = \frac{2(x^2 + z)(x^4 - by^4)}{by^4}, \quad Y = -\frac{4(x^2 + z)xyz}{by^4},$$

$$Z = \frac{4(x^2 + z)^2(z^4 + 4bx^4y^4)}{b^2y^8},$$

et, par suite, l'identité

$$(x^4 - by^4)^4 + b(2xyz)^4 = (z^4 + 4bx^4y^4)^2.$$

La démonstration s'achève alors comme la première.

16. *Formules nouvelles qui permettent, connaissant une solution* (x, y, z) *de l'équation générale* (55), *d'en trouver une autre* (X, Y, Z).

Changeons d'abord, dans les formules (23) du n° 6, X, x, y, z, u, ..., en X_1, X, Y, U, V, ... et faisons-y $z_1 = u_1 = 0, x_1 = y_1 = 1$: on a

$$X_1 = X + rV, \quad Y_1 = X + Y, \quad U_1 = Y + U, \quad V_1 = U + V.$$

Si ensuite, dans les formules (27), on fait $x = 0$, $y = ru$, on a

$$X = r(z^2 + 2ru^2), \quad Y = 2rzu,$$
$$U = (r^2 + r)u^2, \quad V = 2rzu,$$

et, par suite,

$$X_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2rzu), \quad Y_1 = r(z^2 + 2ru^2 + 2zu),$$
$$U_1 = ru[(r + 1)u + 2z], \quad V_1 = ru[(r + 1)u + 2z].$$

En posant maintenant

$$z = -\frac{(r+1)u}{2},$$

on a

$$X_1 = \frac{ru^2}{4}(-3r^2+6r+1), \quad Y_1 = \frac{ru^2}{4}(r^2+6r-3),$$
$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0.$$

D'ailleurs Z_1 est égal à $1-r$, et, en faisant dans l'expression de Z (25)

$$x = 0, \quad y = ru, \quad z = -\frac{r+1}{2}u,$$

on obtient

$$Z = \frac{r^2u^4}{16}(r^4-28r^3+6r^2-28r+1);$$

on a donc l'identité

$$(3r^2-6r-1)^4 - r(3-6r-r^2)^4 = (1-r)(r^4-28r^3+6r^2-28r+1)^2,$$

ou, en remplaçant r par $\frac{-y}{x}$,

$$(66)\quad \begin{cases} x(3y^2+6xy-x^2)^4 + y(3x^2+6xy-y^2)^4 \\ \qquad = (x+y)(x^4+y^4+28xy^3+28yx^3+6x^2y^2)^2. \end{cases}$$

L'identité précédente peut encore s'écrire :

$$x[3(x+y)^2-4x^2]^4 + y[3(x+y)^2-4y^2]^4 = (x+y)[4(x+y)^4-3(x-y)^4]^2,$$

et, en y changeant x, y respectivement en ax^4, by^4, on a

$$a\{x[3(ax^4+by^4)^2-4a^2x^8]^4 + b\{y[3(ax^4+by^4)^2-4b^2y^8]\}^4 = (ax^4+by^4)[4(ax^4+by^4)^4-3(ax^4-by^4)^4]^2.$$

Si maintenant on suppose que (x, y, z) soit une solution de l'équation proposée, on déduit de l'identité précé-

dente l'équation

$$a[x(3c^2z^4 - 4a^2x^8)^2 + b(3c^2z^4 - 4b^2x^8)^2] = cz[c^2z^4 - 3(ax^4 - by^4)^2],$$

et, par suite, on aura une nouvelle solution (X, Y, Z) par les formules

$$(67)\quad \begin{cases} X = x(3c^2z^4 - 4a^2x^8), \quad Y = y(3c^2z^4 - 4b^2x^8), \\ Z = z[4c^4z^8 - 3(ax^4 - by^4)^2]. \end{cases}$$

17. *Résolution de l'équation*

$$(68)\qquad aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

Je me contenterai de démontrer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *a et b étant des nombres entiers quelconques, on peut toujours déterminer c d'une infinité de manières, de telle sorte que l'équation* (68) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Faisant d'abord $z = 0$, $u = 0$ dans les formules (29), on a

$$X_1 = x^3, \quad Y_1 = 3x^2y, \quad U_1 = 3xy^2, \quad V_1 = y^3.$$

Si ensuite on change dans les formules (23) $X, x, \ldots$ en $X', X, \ldots$; qu'on y fasse $u_1 = 0$, $z = 1$, puis qu'on y remplace X_1, Y_1, U_1, V_1 par les expressions précédentes.

---

(1) J'étais déjà arrivé à ce résultat nouveau par une autre méthode (*Comptes rendus* du 7 octobre 1878); cette même méthode donne aussi les formules suivantes, qui s'appliquent au cas où l'équation biquadratique contient en plus le terme dx^2y^2 :

$$X = x[4bcy^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2], \quad Y = y[4acx^4z^2 - (ax^4 - by^4)^2],$$
$$Z = z[4f^2x^8y^8 + (ax^4 - by^4)^4 - (cz^2 - fx^4y^4)^2].$$

Dans la dernière formule, on a représenté par f la quantité $d^2 - 4ab$.

on a

$$(69)\qquad \begin{cases} X' = x^3x_1 + ry^3y_1 + 3rxy^2, \\ Y' = 3xy^2y_1 + x^3y_1 + ry^3, \\ U' = 3xy^2x_1 + 3x^2yy_1 + x^3, \\ V' = y^3x_1 + 3xy^2y_1 + 3x^2y; \end{cases}$$

et si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations que l'on obtient en égalant U′ et V′ à zéro, il vient

$$x_1 = \frac{x^2}{y^2}, \quad y_1 = -\frac{4x}{3y}.$$

Si maintenant on substitue ces valeurs dans les expressions (69) de X′, Y′ et aussi dans Z_1 où l'on a d'abord fait $u = 0$, $v = 0$ [(Z_1 est, comme à l'ordinaire, le résultat de la substitution de x_1, y_1, z_1 à x, y, z dans l'expression de Z (25)], on a

$$X' = \frac{x(3x^4 + 5ry^4)}{3y^2},$$

$$Y' = -\frac{y(5x^4 + 3ry^4)}{3y^2},$$

$$Z = \frac{81x^8 + 158rx^4y^4 + 81r^2y^8}{81y^8}.$$

Alors, en procédant comme on l'a fait pour obtenir l'identité (62), on a, après avoir remplacé r par $-\frac{b}{a}$, l'identité

$$(69)\qquad \begin{aligned} &a[x(3ax^4 - 5by^4)]^4 + b[y(5ax^4 - 3by^4)]^4 \\ &\quad = (81a^2x^8 - 158abx^4y^4 + 81b^2y^8)(ax^4 + by^4)^3, \end{aligned}$$

qui démontre le théorème énoncé.

18. *Résolution de l'équation*

$$(70)\qquad aX^4 + bY^4 = cZ^4.$$

Si l'on part de l'identité évidente

$$(71)\qquad (x+2y)^4-(x-2y)^4=8xy(x^2+4y^2)\times 2^4$$

et qu'on y change x, y en x^2, y^2, on a

$$(72)\qquad (x^2+2y^2)^4-(x^2-2y^2)^4=(x^8-4y^8)\times(2xy)^4.$$

On peut encore obtenir une troisième identité de la manière suivante.

En faisant $a=0$ et $b=1$ dans l'équation (11) et dans les formules (10) et (5), on a

$$x^4-6x^2y^2+y^4)^2+[4xy(x^2-y^2)]^2=(x^2+y^2)^4;$$

et, si l'on multiplie par 2 les deux membres de l'identité précédente, puis que l'on y remplace une expression de la forme $2(s^2+t^2)$ par $(s+t)^2+(s+t)^2$, il vient

$$[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2+[(x-y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2 \\ =[2(x^2+y^2)]^4.$$

On vérifie d'ailleurs facilement que l'on a

$$[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^2-[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^2 \\ =16xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2];$$

et en multipliant, membre à membre, les deux dernières identités, on obtient

$$(73)\quad \left\{\begin{array}{l}[(x+y)^4-4xy^2(3x+2y)]^4 \\ \quad -[(x+y)^4-4x^2y(2x+3y)]^4 \\ \quad =2xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2](2x^2+2y^2)^8.\end{array}\right.$$

Remarque. — On peut encore obtenir l'identité précédente en partant de l'identité (59), dont on met le second membre sous la forme $[(y^2+2x^2)^2-8x^2]^2$, et il ne reste plus qu'à remplacer, au moyen d'un changement de variables, la quantité entre crochets par un carré; ce qui n'offre aucune difficulté.

Les identités (71), (72) et (73) montrent que l'équation (70) peut être résolue en nombres entiers lorsque, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, c a l'une des formes

$$xy(x^2+4y^2), \quad x^8-4y^8, \quad 2xy(x^2-y^2)[x^4+y^4-4(x^2y^2)^2].$$

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème IX. — *Lorsque a et b sont des nombres entiers quelconques, on peut trouver une infinité de valeurs de c telles, que l'équation* (70) *puisse être résolue en nombres entiers.*

Prenons l'identité (30) du n° 6. Les valeurs de X_2, Y_2, U_2, V_2 n'ont pas été calculées; mais, si l'on suppose z et u nuls, on obtient aisément, par la méthode ordinaire,

$$X_2=x^4+ry^4, \quad Y_2=4x^3y, \quad U_2=6x^2y^2, \quad V_2=4xy^3.$$

Si l'on suppose maintenant que l'on multiplie par Z_1 les deux membres de l'équation (30), Z_1 ayant la signification connue, ainsi que X', Y', U', V', on a, en faisant $u_1=0$, $z_1=1$,

$$\begin{aligned}
X' &= (x^4+ry^4)x_1+4rxy^3y_1+6rx^2y^2,\\
Y' &= 4x^3yx_1+(x^4+ry^4)y_1+4rxy^3,\\
U' &= 6x^2y^2x_1+4x^3yy_1+x^4+ry^4,\\
V' &= 4xy^3x_1+6x^2y^2y_1+4x^3y,\\
Z_1 &= (x_1^2-r)^2-ry_1^2(y_1^2-4)^2;
\end{aligned}$$

puis, si l'on résout par rapport à x_1, y_1 les équations $U'=0$, $V'=0$, on a les valeurs

$$x_1=\frac{5x^4-3ry^4}{10x^2y^2}, \quad y_1=\frac{ry^4-5x^4}{5x^3y},$$

que l'on substitue dans Z', Y', U', V', Z_1. On voit alors

que, en remplaçant t par $-\frac{b}{a}$, on peut prendre pour valeurs de X', Y', Z_1, Z satisfaisant à l'identité

$$a\mathrm{X}'^4 + b\mathrm{Y}'^4 = \mathrm{Z}_1\mathrm{Z}',$$

$$\mathrm{X}' = x(5a^2x^8 - 22abx^4y^4 - 5b^2y^8),$$

$$\mathrm{Y}' = 2y(5a^2x^8 - 10abx^4y^4 + b^2y^8),$$

$$\mathrm{Z}_1 = 625a^3x^{20} - 3500a^2bx^{16}y^4 + 5350a^3b^2x^{12}y^8 - 860ab^3x^8y^{12} - 79ab^4x^4y^{16} + 16b^5y^{20},$$

$$\mathrm{Z} = ax^4 + by^4.$$

Le théorème IX est ainsi démontré.

V. — Théorèmes généraux relatifs a la résolution de l'équation $a\mathrm{X}^m + b\mathrm{Y}^m = c\mathrm{Z}^n$.

19. Dans ce qui va suivre, nous dirons que deux fonctions entières $f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont équivalentes lorsque la deuxième se déduit de la première en remplaçant dans celle-ci X, Y, ... par des fonctions entières de $x, y, \ldots$, ou qu'après la substitution les deux fonctions ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur qui est une certaine puissance d'une fonction entière. C'est ainsi, par exemple, qu'en vertu de l'identité (40) les deux fonctions $\mathrm{X}^3 + \mathrm{Y}^3$ et $xy(x+y)$ sont équivalentes.

Théorème X. — *Pour que l'équation*

$$a\mathrm{X}^m + b\mathrm{Y}^m = c\mathrm{Z}^n$$

ait une solution entière, il faut et il suffit que c soit de la forme $ax^m + by^m$.

En effet, la condition est suffisante, puisque, si elle est remplie, l'équation proposée admet la solution $(x, y, 1)$. Elle est aussi nécessaire, car, si (x_1, y_1, z_1) est une solu-

tion de l'équation, on a

$$ax_1^m + by_1^m = cz_1^n ;$$

d'où il suit que, si on laisse de côté le facteur z_1^n, c est bien de la forme demandée.

Si l'on considère le cas particulier où m et n sont égaux à 3 et a, b égaux à 1, on obtient la forme $x^3 + y^3$; mais les deux formes $xy(x+y)$ et x^3+y^3 étant équivalentes, comme on l'a déjà remarqué, on peut dire, avec M. Lucas, que, pour que l'équation $X^3 + Y^3 = cZ^3$ puisse être résolue en nombres entiers, il faut et il suffit que c, débarrassé de ses facteurs cubiques, soit de la forme $xy(x+y)$.

Remarque. — Toutes les formes de c que nous avons données, si nombreuses qu'elles soient, sont équivalentes à la forme $ax^m + by^m$, mais elles n'en sont pas moins utiles à connaître, car elles serviront à faire connaître *a priori* des solutions entières des équations, comme on le verra dans la Section suivante, consacrée aux applications numériques.

Théorème XI. — *a et b étant arbitraires dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$, on peut toujours trouver une fonction c de a, b et d'autant de variables que l'on veut, telle que l'équation puisse être résolue en nombres entiers.*

On voit d'abord aisément que, dans le produit représenté par le déterminant du n° 7, la partie qui est fonction des seules variables x_0, x_1 est $x_0^m - (-1)^m r x_1^m$; c'est encore ce que l'on reconnaît comme il suit.

En appelant Q la partie du produit qu'il s'agit de déterminer, on a

$$Q = (\alpha x_0 + \alpha' x_1)(\beta x_0 + \beta' x_1)(\gamma x_0 + \gamma' x_1) \dots,$$

ou, en posant

$$\frac{x_0}{x_1} = \xi,$$

$$Q = (-1)^m x_1^m (\xi - \alpha)(\xi - \beta)\ldots = (-1)^m x_1^m (\xi^m - r)$$
$$= x_1^m [\xi^m - (-1)^m r] \qquad = x_0^m - (-1)^m r x_1^m.$$

Cela posé, si l'on multiplie entre elles d'abord n fonctions égales de l'espèce de celle qui est représentée par le déterminant du n° 7, puis ce produit lui-même par le produit d'un nombre quelconque p de fonctions de même espèce que la première, mais différentes de celles-ci et non égales entre elles, on obtient finalement un produit qui est une fonction de même espèce que ses facteurs, et, en représentant par Z la fonction élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance, par c le produit des p facteurs différents et par $(X_0)_k, (X_1)_k, \ldots$ les expressions de $X_0, X_1, \ldots$ qui correspondent à la dernière multiplication, on a une équation de cette forme :

$$(75) \qquad [(X_0)_k]^m - (-1)^m r[(X_1)_k]^m + \ldots = cZ^n.$$

En effet, d'après ce qui a été dit précédemment, on sait que le premier membre de l'équation (75) doit contenir les deux termes $(X_0)_k^m, -(-1)^m r(X_1)_k^m$.

On peut maintenant disposer des variables introduites par les p derniers facteurs de manière à annuler, dans le premier membre de l'identité (75), tous les termes, excepté les deux premiers. En effet, comme on le voit par les expressions des fonctions $X_0, X_1, X_2, \ldots$ données dans le n° 7, les équations à résoudre sont du premier degré, par rapport aux variables qui correspondent à l'un des p derniers facteurs.

Alors, en substituant dans l'équation (75) à ces variables leurs expressions, c deviendra une fonction de toutes les variables, excepté celles par rapport auxquelles

on a résolu. Il ne reste plus enfin, pour obtenir l'équation demandée, qu'à remplacer dans l'équation (75) r par $\frac{b}{a}$ ou $-\frac{b}{a}$ suivant que m est impair ou pair.

Une application particulière de la méthode précédente a été faite à la fin du n° 9 ; si on la reprend, ce qui précède deviendra clair.

Dans les deux théorèmes qui vont suivre, on suppose que n est égal à m, c'est-à-dire qu'il s'agira de l'équation

$$aX^m + bY^m = cZ^m. \tag{76}$$

Théorème XII. — *Pour que l'équation* (76) *ait deux solutions, il faut et il suffit qu'après avoir multiplié ou divisé, s'il est nécessaire, les deux membres de l'équation par un même nombre entier, on obtienne pour* a, b, $-c$ *des expressions* $l^m - p^m$, $q^m - r^m$, $s^m - t^m$, l, q, s, p, r, t *étant des nombres entiers tels, que le produit des trois premiers soit égal au produit des trois autres.*

On remarque d'abord que l'on peut toujours obtenir une infinité d'équations de la forme (76) admettant deux solutions. En effet, si l'on écrit que l'équation (76) a les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), on obtient deux équations du premier degré, par rapport à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, qui donnent les valeurs de ces inconnues, et l'on peut prendre

$$\left\{\begin{array}{l} a = z^m y'^m - y^m z'^m, \\ b = x^m z'^m - z^m x'^m, \\ -c = y^m x'^m - x^m y'^m. \end{array}\right. \tag{77}$$

Ainsi a, b, $-c$ sont chacun la différence des $m^{\text{ièmes}}$ puissances de deux nombres entiers, et si l'on représente zy', xz', yx', yz', zx', xy' respectivement par l, q, s, p, r, t, on a bien

$$lqs = prt ; \tag{78}$$

la condition énoncée est donc nécessaire. Je dis maintenant qu'elle est suffisante. En effet, supposons qu'après avoir multiplié ou divisé les deux membres de l'équation (76) par un facteur constant, on ait

$$a = l^n - p^n, \quad b = q^m - r^m, \quad -c = s^m - t^m, \quad lqs = prt;$$

on pose

$$\left\{\begin{array}{lll} zy' = l, & yz' = p, & xz' = q, \\ zx' = r, & yx' = s, & xy' = t, \end{array}\right. \tag{79}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{z} = \frac{l}{t}, \quad \frac{y}{z} = \frac{s}{r}, \quad \frac{x}{y} = \frac{q}{p},$$

la dernière équation étant la conséquence des deux autres à cause de la relation (78).

Alors, pour obtenir des valeurs entières, on peut poser

$$x = rt, \quad y = ls, \quad z = lr. \tag{80}$$

Si maintenant on substitue dans les équations (76) les valeurs de x, y, z (80), on a

$$x' = \frac{1}{l}, \quad y' = \frac{1}{r}, \quad z' = \frac{p}{sl},$$

ou encore, comme on ne prend que des valeurs entières,

$$x' = sr, \quad y' = ls, \quad z' = pr. \tag{81}$$

Ainsi, lorsque les conditions de l'énoncé sont remplies, l'équation (76) a deux solutions entières (x, y, z), (x', y', z') données par les formules (80) et (81).

Remarque. — On voit aisément que le théorème n'est en défaut que si l'on a

$$l = q, \quad p = r, \quad r^2 t = l^2 s; \tag{82}$$

dans ce cas, les deux solutions données par les formules

(80) et (81) n'en font plus qu'une seule. C'est ainsi, par exemple, que si l'on a l'équation

$$X^m + Y^m = (\alpha^m + \beta^m) Z^m,$$

ou

$$(\alpha^m - \beta^m) X^m + (\alpha^m - \beta^m) Y^m = (\alpha^{2m} - \beta^{2m}) Z^m,$$

pour laquelle les conditions de l'énoncé du théorème XII sont remplies, les formules (80) et (81) donnent la solution unique $(\alpha, \beta, 1)$.

Faisons une application du théorème XII à l'équation

$$X^4 - Y^4 = 1174935 Z^4.$$

On a les identités numériques

$$1174935 = \frac{79^4 - 67^4}{2^4}, \quad 2^4 (79^4 - 67^4) = 133^4 - 59^4,$$

$$(79^4 - 67^4)(59^4 - 134^4) = (79 \times 59)^4 - (133 \times 67)^4;$$

alors, si l'on multiplie les deux membres de l'équation proposée par $118^4 - 268^4$, il vient

$$(118^4 - 268^4) X^4 + (316^4 - 266^4) Y^4 = [(79 \times 59)^4 - (133 \times 67)^4] Z^4,$$

et l'on a

$$l = 118, \quad q = 316, \quad s = 133 \times 67,$$
$$p = 268, \quad r = 266, \quad t = 79 \times 59.$$

On voit que la condition (78) est remplie, et, en appliquant les formules (80) et (81), on reconnaît que l'équation proposée admet les deux solutions (79, 67, 2), (133, 59, 4) (*).

(*) On s'appuie ici sur la résolution de l'équation $X^4 + Y^4 = Z^4 + U^4$, et sur la relation $(a^4 - b^4)(d^4 - b^4) = (ad)^4 - (bc)^4$, qui a lieu lorsque a, b, c, d sont des nombres tels que l'équation $a^4 - b^4 = c^4 - d^4$ soit satisfaite. Je reviendrai plus tard sur cette question.

THÉORÈME XIII. — *Pour que l'on puisse trouver des équations de la forme* (76) *qui, pour une certaine valeur de m, admettent trois solutions, il faut et il suffit que l'on puisse résoudre en nombres entiers le système des deux équations*

$$P^m + Q^m + R^m = U^m + V^m + T^m, \tag{83}$$

$$PQR = UVT. \tag{84}$$

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si l'équation (76) admet les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), les valeurs de a, b, c sont données par les formules (77), et l'on exprime que la même équation a une troisième solution (x'', y'', z'') en écrivant

$$\begin{aligned}&(z^m y'^m - y^m z'^m)x''^m + (x^m z'^m - z^m x'^m)y''^m\\ &\quad = (x^m y'^m - y^m x'^m)z''^m,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(zy'x'')^m + (xz'y'')^m + (yx'z'')^m\\ &\quad = (yz'x'')^m + (zx'y'')^m + (xy'z'')^m.\end{aligned}$$

Or, comme les six nombres $zy'x''$, $xz'y''$, $yx'z''$, $yz'x''$, $zx'y''$, $xy'z''$ sont tels que le produit des trois premiers est égal au produit des trois autres, ces nombres satisfont aux deux équations (83) et (84).

2° *La condition est suffisante.* — En effet, supposons qu'elle soit remplie pour les six nombres d, e, f, g, h, k, c'est-à-dire que l'on ait

$$d^m + e^m + f^m = g^m + h^m + k^m, \quad def = ghk.$$

On pose

$$\begin{aligned}zy'x'' = d, \quad xz'y'' = e, \quad yx'z'' = f, \quad y'z'x'' = g,\\ zx'y'' = h, \quad xy'z'' = k,\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$x' = ghx, \quad y' = dey, \quad z' = egz, \tag{85}$$

$$x'' = ghx, \quad y'' = chy, \quad z'' = efz. \tag{86}$$

Ainsi, lorsque les équations (83) et (84) sont satisfaites par six nombres entiers d, e, f, g, h, k, on peut former une équation de la forme (76) qui admette une solution arbitraire (x, y, z) et deux autres solutions (x', y', z'), (x'', y'', z'') données par les formules (85) et (86).

Faisons une application du théorème au cas où m est égal à 3. A l'aide de l'identité en x, y qui a conduit aux formules (51) du n° 11, j'obtiens d'abord les six nombres $33, -34, 1, 11, -17, 6$ pour lesquels on a

$$33^3 + (-34)^3 + 1^3 = 11^3 + (-17)^3 + 6^3,$$
$$33 \times (-34) \times 1 = 11 \times (-17) \times 6.$$

Je prends ensuite arbitrairement

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1,$$

et si l'on pose

$$d = 33, \quad e = -34, \quad f = 1, \quad g = 11, \quad h = -17, \quad k = 6,$$

les formules (85) et (86) donnent, après la suppression de facteurs communs,

$$x' = 1, \quad y' = -6, \quad z' = 2,$$
$$x'' = 11, \quad y'' = 34, \quad z'' = 2.$$

Mais, en calculant les valeurs de a, b, c par les formules (77), où l'on fait $m = 3$, on obtient l'équation

$$208\,X^3 - 7\,Y^3 = 215\,Z^3;$$

on est donc assuré d'avance que cette équation admet les trois solutions $(1, -1, 1)$, $(1, -6, 2)$, $(11, 34, 2)$.

Comme, jusqu'à présent, on ignore si le système des équations (83) et (84) peut être résolu pour des valeurs de m supérieures à 3, on ne sait pas non plus si, pour de pareilles valeurs de m, l'équation (76) peut avoir trois

solutions. Quoi qu'il en soit, le théorème précédent montre que la question de résoudre le système des deux équations (83) et (84) présente le plus grand intérêt.

Théorème XIV. — *On peut résoudre en nombres entiers l'équation*

$$X^{4m} - a^2 Y^{4m} = Z^2,$$

ou, ce qui revient au même, le système des deux équations

$$(87) \qquad X^{2m} + aY^{2m} = U^2, \quad X^{2m} - aY^{2m} = V^2,$$

lorsque a est de la forme $\frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{2m}}{2i}$ (*i représente* $\sqrt{-1}$).

En effet, si l'on pose

$$p + qi = (x + yi)^m, \quad p - qi = (x - yi)^m,$$

on a

$$p^2 + q^2 = (x^2 + y^2)^m, \quad 2p = (x + yi)^m + (x - yi)^m,$$
$$2qi = (x + yi)^m - (x - yi)^m,$$
$$2(p^2 - q^2) = (x + yi)^{2m} + (x - yi)^{2m},$$

et, par suite,

$$4pq(p^2 - q^2) = \frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{4m}}{2i},$$

$$p^2 - q^2 \pm 2pq = \frac{(1 \mp i)(x+yi)^{2m} + (1 \pm i)(x-yi)^{2m}}{2},$$

les signes supérieurs se correspondant dans les deux membres de l'équation précédente, ainsi que les signes inférieurs.

Cela posé, dans les équations (60) et (61) du n° 14, changeons x et y en p et q, puis remplaçons dans les équations ainsi transformées $p^2 + q^2$, $4pq(p^2 - q^2)$,

$p^2 - q^2 \pm 2pq$ par les expressions précédentes : on a alors la double identité

$$(x^2+y^2)^{2m} \pm \frac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{4m}}{2i} \times 1^{2m}$$
$$= \frac{[(1 \mp i)(x+yi)^{2m} + (1 \pm i)(x-yi)^{2m}]^2}{2},$$

en faisant correspondre dans les deux membres les signes supérieurs ainsi que les signes inférieurs : le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si l'on admet qu'on ne peut satisfaire à l'équation $x^2+y^2=z^{2m}$ qu'en posant

$$x+yi=(p+qi)^{2m}, \quad x-yi=(p-qi)^{2m}, \quad z=p^2+q^2,$$

on démontrera aisément que la condition donnée pour a (théorème XIV) est à la fois nécessaire et suffisante.

20. *Généralisation des nombres congruents.* — Lorsque m est égal à 1 dans les équations (87), le nombre a est dit *congruent* par rapport à deux carrés. Alors on peut convenir d'appeler *nombre congruent de l'ordre m* le nombre a, tel que les équations (87) puissent être satisfaites simultanément.

Si l'on fait d'abord m égal à 1 dans l'expression générale de a, on trouve $xy(x^2-y^2)$ après la suppression du facteur carré 4 : c'est ce que l'on savait déjà. Si ensuite on fait m égal à 2, on trouve pour a, après avoir divisé par 2^4, $\frac{xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2]}{2}$. En donnant dans cette expression à x et y les valeurs 2 et 1, on obtient pour valeur de a le nombre 21, qui est le plus petit nombre congruent du second ordre.

VI. — Applications numériques des identités et des formules.

21. *Résolution de quelques équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^3 + Y^3 = cZ^3. \tag{88}$$

On a vu que l'équation (88) peut être résolue lorsque c a l'une des formes suivantes :

$$x^3 + y^3, \quad 2(x^6 + 3y^2), \quad x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y),$$
$$xy(x + y), \quad x(y^3 - x), \quad x^9 + y^9 - 3x^3y^3(8x^3 - y^3).$$

Si dans ces expressions on remplace x et y par les nombres entiers les plus simples, pris avec les signes + ou —, on reconnaît que l'équation (88) peut être résolue pour les valeurs de c égales à 6, 7, 9, 12, 15, 17, 19, 20, 22, 26, 28, 30, 37.

22. Je vais maintenant m'occuper de quelques équations particulières de la forme (88). Mais il importe de définir d'abord ce que j'entendrai par une *solution initiale* d'une équation numérique à trois inconnues. Je désignerai ainsi une solution de l'équation qui ne peut se déduire d'aucune autre à l'aide des formules qui donnent une suite de solutions correspondant à une première solution connue. Par exemple, on aura une solution initiale de l'équation (88) si cette solution ne peut pas s'obtenir à l'aide des formules (48) et (49), quelle que soit la solution prise pour point de départ.

1° $c = 19$. En substituant successivement, à la place de x et y, 3 et -2 dans $2(x^6 + 3y^2)$, 3 et 1 dans $x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y)$, 1 et 2 dans

$$x^9 - y^9 - 3x^3y^3(8x^3 - y^3),$$

on voit, par les identités (39), (42), (47), que l'équation

$$X^3 + Y^3 = 19Z^3$$

admet les trois solutions $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(8, 1, 3)$.

Si maintenant, dans les formules (51) du n° 11, on fait

$$x = 3, \quad y = -2, \quad z = 1.$$
$$x' = 8, \quad y' = 1, \quad z' = 3,$$

ou

$$x' = 36, \quad y' = -17, \quad z' = 13,$$

on obtient une quatrième solution $(5, 3, 2)$. Des deux solutions $(8, 1, 3)$, $(36, -17, 13)$ on déduirait ensuite, à l'aide des formules (51), une nouvelle solution $(92, 33, 35)$; mais celle-ci s'obtient immédiatement par les formules (48) en partant de la solution $(3, -2, 1)$. Les formules (51) donnent encore la solution $(133\,01, -1322, 498)$ comme conséquence des deux solutions $(5, 3, 2)$, $(36, -17, 13)$.

On pourrait continuer à chercher de nouvelles solutions au moyen des formules (51); mais, en arrêtant ici le calcul, je dis que les solutions $(8, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(133\,01, -1322, 498)$, $(5, 3, 2)$ sont toutes les cinq, des solutions initiales.

En effet, on voit d'abord qu'aucune des quatre premières solutions ne peut être déduite des formules (49), qui ne donnent jamais une valeur paire pour une des inconnues x, y et une valeur impaire pour l'autre.

Je dis ensuite que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, elle ne peut pas non plus être donnée par les formules (48). En effet, soient (x_n, y_n, z_n), $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ deux solutions consécutives données par les formules (48), et supposons que la solution

$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ soit d'abord identique avec la solution $(8, 1, 3)$; alors on aura

$$\frac{x_n(x_n^3 + 2y_n^3)}{-y_n(2x_n^3 + y_n^3)} = 8,$$

ou, en posant $\frac{x_n}{y_n} = m$,

$$m^4 + 16m^3 + 2m + 8 = 0.$$

Si la solution $(8, 1, 3)$ était donnée par les formules (48), la dernière équation devrait avoir au moins une racine commensurable ; or, comme on reconnaît qu'elle n'en a aucune, on en conclut que la solution $(8, 1, 3)$ ne peut être donnée par les formules (48). On voit, d'une manière toute semblable, que la deuxième, la troisième et la quatrième solution ne peuvent pas être données par les formules (48) ; car, s'il en était autrement, on devrait pouvoir résoudre en nombres commensurables les équations

$$2m^4 - 6m^3 + 4m - 3 = 0,$$
$$17m^4 - 72m^3 + 34m - 36 = 0,$$
$$1322m^4 - 26602m^3 + 2644m - 13301 = 0,$$

ce qui est impossible. Ainsi, il est prouvé que les quatre premières solutions sont des solutions initiales.

Je dis enfin qu'il en est de même de la cinquième solution. En effet, si elle était donnée par les formules (48) ou (49), on aurait à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des équations

$$3m^4 + 10m^3 + 6m + 5 = 0,$$
$$8m^3 + 3m^6 - 31m^3 - 8 = 0,$$

ce que l'on reconnaît impossible.

2° $c = 37$. En donnant à x, y les valeurs 4 et -3 dans $x^3 + y^3$, 3 et -1 dans $x^3 - y^3 - 3xy(x + y)$,

2 et 1 dans $x^9 + y^9 - 3x^3y^3(8x^3 - y^3)$, on a les trois solutions $(4, -3, 1)$, $(19, 18, 7)$, $(10, -1, 3)$, et à l'aide des formules (51) on obtient les deux autres solutions $(1033, -33, 310)$, $(13683, -9587, 3568)$. On démontre, comme dans le cas précédent, que les cinq solutions peuvent être prises comme solutions initiales, et peut-être y en a-t-il encore d'autres.

23. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$aX^3 + bY^3 = cZ^3. \tag{89}$$

On sait que l'on peut toujours obtenir des équations de la forme (89) qui admettent deux solutions arbitraires, et une troisième solution qu'on en déduit à l'aide des formules (51). On conçoit que l'on puisse ainsi obtenir une infinité d'équations de la forme (89) admettant trois solutions initiales au moins. Si, par exemple, on forme l'équation

$$9X^3 + 7Y^3 = 2Z^3,$$

qui admet les deux solutions $(1, -1, 1)$, $(1, 1, 2)$ et une troisième solution $(3, 1, 5)$ qu'on en déduit par les formules (51), on vérifie par la méthode précédemment employée qu'aucune des trois solutions ne peut être donnée par les formules (50) Or, comme ces formules sont les seules formules générales qui donnent une nouvelle solution de l'équation (89) quand on en connaît une autre, les trois solutions précédentes sont des solutions initiales.

24. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^4 + bY^4 = Z^2. \tag{90}$$

On a vu (14) que l'équation (90) peut être résolue

lorsque b est de l'une des formes $x^2y(y+2x)$, $x(y^2-x)$, $-xy^2(x+y)$. En substituant dans les expressions précédentes pour x et y des nombres dont la valeur absolue est égale ou inférieure à 5, on reconnaît aisément que l'équation (90) peut être résolue pour les valeurs suivantes de b : $-2, 3, -5, -6, 8, -10, \pm 12, 14, 15, -17, 18, \pm 20, -21, -22$. Dans ces différents cas on trouve d'abord une première solution de l'équation (90) en se servant des identités qui correspondent aux diverses expressions de b, et l'on obtient ensuite d'autres solutions en appliquant les formules (64) et (67).

Dans les calculs que je viens d'indiquer, je n'ai pas rencontré d'équations à plusieurs solutions initiales, mais il n'est pas démontré qu'une pareille circonstance ne puisse pas se présenter.

25. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^4+Y^4=cZ^2. \tag{91}$$

Je donnerai ici un seul exemple. Faisons a et b égaux à 1 dans l'identité (62) ; alors l'expression de c devient $(9x^4-y^4)^2+4x^4y^4$. Si l'on y fait d'abord x et y égaux à 1, on a c égal à 17×4, et l'on trouve ainsi que, pour $c=17$, l'équation (91) a une première solution $(1, 2, 1)$. Mais si ensuite on remplace, dans la même expression de c, x et y respectivement par 1 et 3, on a c égal à $2^2\times 3^4\times 17$, et l'on obtient encore, pour $c=17$, la solution $(13, 2, 41)$.

Maintenant on prouve par la méthode ordinaire que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, les formules (67) ne donneront jamais les deux solutions précédentes. En effet, s'il en était autrement, on aurait

à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des deux équations

$$\frac{x(3y^8+6x^4y^4-x^8)}{y(3x^8+6x^4y^4-y^8)}=\frac{1}{2}\quad\text{ou}\quad\frac{13}{2},$$

ce que l'on reconnaît impossible. Les deux solutions (1, 2, 1), (13, 2, 41) sont donc deux solutions initiales, si l'on admet qu'on n'ait pas d'autres formules générales que les formules (69) pour la résolution de l'équation (91) (*).

26. *Résolution des équations numériques comprises dans les équations générales*

$$aX^4+bY^4=cZ^2, \tag{92}$$

$$aX^4+bY^4=cZ^4. \tag{93}$$

Les identités (69) et (74) ne conduisent le plus souvent qu'à de grandes valeurs de c, même dans le cas où a et b sont égaux à ± 1; mais, si l'on suppose $a=1$, $b=-1$, en prenant les différences des quatrièmes puissances des plus petits nombres entiers, on pourra arriver à des valeurs simples de c. Ainsi les identités numériques

$$2^4-1=15,\quad 3^4-1=5\times 2^4=10\times 2^3$$

montrent que, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, les équations (92) et (93) pourront être résolues, la première, lorsque c sera égal à 15 ou 10, la seconde, lorsque c sera égal à 15 ou 5.

(*) Il y en a d'autres, comme je le ferai voir dans un autre article; mais je n'ai pas voulu m'en servir ici, parce qu'elles n'ont pas été obtenues par la méthode des identités

On peut encore trouver autrement des équations de la forme (92) ou (93) dont la résolution en nombres entiers soit possible. Soient Z, X_1, Y_1, U_1, V_1 des polynômes donnés, le premier par la formule (25) et les autres par les formules (29).

Faisons $u = 0$ dans tous ces polynômes, résolvons par rapport à r et z les équations $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ et substituons dans X_1, Y_1, Z pour r et z leurs valeurs. Alors, si l'on remplace dans l'équation (28) U_1 et V_1 par zéro et X_1, Y_1, Z par leurs expressions, on tombe sur l'identité numérique

$$135 \times 3^4 - 4 \times 7^4 = 11^3,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$135\,X^4 - 4\,Y^4 = Z^3$$

admet la solution (3, 7, 11).

On prouve d'une manière toute semblable que l'équation

$$X^4 - Y^4 = 84\,Z^4$$

admet la solution (31, 17, 10). On arrive d'ailleurs à cette dernière solution en faisant x et y respectivement égaux à 2 et 1 dans l'identité (73).

VII. — Résumé et conclusion.

27. Lorsque dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$ on suppose m supérieur à 2, on peut considérer quatre cas principaux suivant que m et n sont respectivement égaux à 3 et 2, tous deux égaux à 3, m et n respectivement égaux à 4 et 2, m égal ou supérieur à 4 et n supérieur à 2.

Dans le premier cas, l'équation, comme on l'a vu, a toujours une infinité de solutions.

Dans le deuxième et le troisième cas, l'équation peut être impossible ou bien avoir une infinité de solutions; encore ce dernier point n'a pas été jusqu'ici rigoureusement établi, car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait avoir démontré que, par l'emploi des formules qui permettent de déduire une solution d'une autre, on ne retombe jamais sur l'une des solutions précédentes.

Soit d'abord considérée l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^3$. Si l'on a trouvé plusieurs solutions initiales en faisant usage de certaines identités suivant la méthode que nous avons indiquée, on déduira de chacune des solutions obtenues une infinité d'autres solutions, à l'aide des formules (48) et (49) quand a et b seront égaux à 1, et en employant le système unique des formules (50) dans le cas général. D'ailleurs, toutes les fois que l'on aura obtenu deux solutions nouvelles, pourvu qu'elles ne soient pas deux solutions consécutives données par les formules (48) ou (50), on aura une solution nouvelle par l'emploi des formules (51). Mais, en procédant comme on vient de le dire, on ne pourra pas affirmer cependant que l'on a obtenu la solution complète, même en prenant une équation numérique particulière; car, pour être assuré qu'il en est ainsi, il faudrait avoir démontré que, dans l'exemple que l'on a choisi, le nombre des solutions initiales est fini et qu'on les a obtenues toutes.

Soit maintenant à résoudre l'équation

$$aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

Après avoir obtenu à l'aide d'identités une ou plusieurs solutions initiales, on en obtient une infinité d'autres, à l'aide des formules (64) et (67) lorsque, c étant égal à 1, l'un des nombres a ou b est aussi égal à 1, et en em-

ployant, dans le cas général, le système unique des formules (67).

Comme je l'ai déjà dit dans le n° 25, on peut, dans le cas général, trouver un deuxième système de formules de telle sorte que, dans ce cas comme dans le cas particulier, d'une solution connue on peut déduire deux solutions nouvelles. Ce n'est pas tout, dans les *Comptes rendus* du 7 avril 1879, j'ai donné le moyen d'avoir des formules qui permettent d'obtenir quatre solutions nouvelles quand on en connaît deux. Mais en employant la méthode, même ainsi complétée, on n'est pas sûr encore d'avoir toutes les solutions de l'équation, et cela pour les mêmes raisons que dans le cas de l'équation cubique.

Nous arrivons maintenant au quatrième cas. Alors le nombre des solutions peut être égal à 0, 1 ou 2; mais jusqu'à présent on ignore si, même dans les cas les plus simples, c'est-à-dire pour les équations (93) et (94), le nombre des solutions peut être égal ou supérieur à 3. J'ai donné, il est vrai, dans le cas de l'équation (76), la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation puisse avoir trois solutions; mais je n'ai pu en faire l'application qu'à l'équation cubique.

28. Le travail que je termine ici ne sera pas inutile s'il montre bien, comme je l'espère, de quelle importance sont la recherche des identités et surtout la détermination des solutions initiales, dont on ne paraît pas s'être occupé jusqu'ici (*). On aura remarqué aussi toute la difficulté que présente la question de trouver la solu-

(*) D'après une Note de M. Lucas (*Nouvelles Annales*, novembre 1878) il faudrait faire exception pour M. Sylvester; mais jusqu'ici l'illustre géomètre n'a rien publié de ses recherches.

tion complète des équations dans le cas où elles ont une infinité de solutions. Il n'est donc pas étonnant que jusqu'ici aucun géomètre n'ait pu démontrer en toute rigueur que, dans le cas auquel nous venons de faire allusion, il avait la solution complète même d'une équation numérique particulière.

(Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVIII, 1879.)

5644 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

QA
218
D47

Desboves, Adolphe Honoré
Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation aX^m $bY^m = cZ^n$

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY